

UNA EXPERIENCIA DOCENTE SOBRE EL USO COTIDIANO DE LAS DIFERENTES LÓGICAS

J. Tinguaro Rodríguez¹, Carely Guada¹, Javier Montero^{1,2}

¹Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, Madrid 28040

²Instituto de Geociencias, CSIC-UCM, Madrid 28040

RESUMEN

En este artículo se presentan los resultados de una experiencia realizada con dos grupos de alumnos, uno de Ciencias Sociales y otro de Ciencias Matemáticas, con la finalidad de observar las posibles disimilitudes en la percepción y uso de diferentes lógicas. El resultado de esta experiencia inicial mostrará, sobre todo, cómo el científico acepta más fácilmente que el humanista modelos que su propio sentido común rechaza, lo cual es un aspecto que se debe tomar en cuenta en estudios formales posteriores.

Palabras Clave: Lógica binaria, Lógica trivalente, Lógica difusa.

1 EL PROBLEMA DE LA GRADUALIDAD

Uno de los problemas más críticos con los que se enfrenta el desarrollo de las tecnologías difusas, es la estimación de los grados de pertenencia; esto es, cómo medir de manera objetiva (o al menos intersubjetiva) la gradualidad que se observa en los conceptos difusos, como son la mayor parte de las nociones que se usan en la vida cotidiana. Pensemos en el almacenamiento y la recuperación de información imprecisa de una base de datos, en donde los registros pertenecen en un cierto grado de pertenencia a los conjuntos identificados implícitamente definidos mediante ciertas *queries* o consultas [7]. Y es que, para muchas aplicaciones las estimaciones subjetivas de la gradualidad resultan insuficientes.

Por ejemplo, la Teoría de la Probabilidad dispone de una herramienta bien desarrollada, que a través de experimentos perfectamente definidos y consistentes con la lógica binaria [3], permite calcular frecuencias relativas, y de este modo estimar o contrastar empíricamente cada probabilidad.

Este problema de *estimabilidad* de los grados borrosos ha sido abordado por algunos autores, asignando a los grados de pertenencia una estimación basada en la frecuencia con que los usuarios escogen determinada palabra [1]. Estas propuestas producen una cierta confusión entre probabilidad y borrosidad [4], ya que sugieren, por ejemplo, que una persona es "alta" en la medida en que los demás nos referimos a esa persona como "alta". De algún modo, por ejemplo, a partir de esta propuesta consideraríamos que una persona sería "alta" en grado 0.90, si el 90% de la gente escoge la palabra "alta" para referirse a ella.

En cierto modo, este enfoque implica o conlleva implícitamente aproximar un concepto impreciso mediante su versión binaria o precisa, de manera que en el ejemplo anterior se obliga a asignar la valoración 1 a la verificación del concepto "alto" y la valoración 0 a su complemento "no-alto", no admitiendo en principio valoraciones o grados intermedios (cada usuario debe elegir entre las dos valoraciones extremas 0 y 1). Entonces, bajo esta aproximación el grado de pertenencia de una persona a la categoría "alto" se computa mediante un argumento frecuentista, asociándolo a la media de las valoraciones en $\{0,1\}$ que recibe la altura de esa persona por parte de los usuarios (i.e. a la proporción de usuarios que consideran que esa persona es "alta").

En otras palabras, el grado de verificación en este caso se asimila a la Probabilidad con la que los individuos escogen una u otra opción, 0 o 1. Sin embargo, cuando la persona se encuentra cercana a la frontera entre las categorías "alto" y "no-alto", es decir cuando en un contexto borroso la graduación de esta persona estaría cercana al punto de simetría 0.5 (i.e. al punto equidistante entre los dos extremos 0 y 1), una pequeña desviación (digamos la correspondiente por ejemplo a unas valoraciones teóricas 0.45 o 0.55), puede hacer que los usuarios asignen con cierta

unanimidad uno de los dos valores extremos (0 o 1) como el más cercano al forzar la consideración de esas nociones como nítidas o precisas.

Por este motivo, la visión frecuentista no ofrece una buena estimación de la gradualidad borrosa (el grado de verificación del concepto "alto" puede estar en el entorno de 0.5, pero la frecuencia con la que los usuarios escogen la valoración "alto" puede estar cercana al 100%). Como se desprende del análisis anterior, parte del problema está en que de manera implícita se está obligando a los usuarios a pensar en términos binarios, proporcionándoles solo dos opciones para expresar su valoración.

2 SOBRE EL OBJETIVO INICIAL DE LA EXPERIENCIA

El objetivo inicial de la experiencia que nos planteamos consistía en determinar en qué medida es posible asociar el grado de verificación de un concepto con el tiempo que los usuarios necesitan para hacer una elección nítida entre su verificación (1) y no-verificación (0). De algún modo, este planteamiento se basa en la hipótesis de que cuando el concepto claramente se verifica o no se verifica, el usuario rápidamente identifica cuál de las dos situaciones es la correcta. Pero a medida que la verificación del concepto se aproxima al punto de simetría, se asume que las dificultades aumentarán y se necesitará más tiempo para discernir una diferencia que permita escoger una de las dos opciones disponibles. Así pues, si esta hipótesis es correcta, podríamos asociar tiempos de respuesta mayores con grados más cercanos a 0.5, y tiempos de respuesta menores con grados cercanos a 0 o 1.

Es importante resaltar que la experiencia que se relata en este trabajo es una aproximación preliminar destinada a verificar la posibilidad de llevar a cabo un experimento más formal para comprobar o descartar la hipótesis anterior. En este sentido, antes de llevar a cabo ese experimento formal, decidimos tantear preliminarmente algunos posibles procedimientos experimentales. Por ejemplo, la información a partir de la cual los usuarios han de discernir la verificación o no verificación de la categoría lingüística bajo análisis, ¿ha de presentarse directamente (digamos de manera visual) o ha de facilitarse mediante una descripción numérica? ¿Es adecuado permitir a los usuarios solo dos opciones en su valoración? Por este motivo, en principio decidimos dividir esta experiencia preliminar en dos cuestiones o experiencias más básicas, de manera que en la primera la

información se provea de manera visual y en la segunda esta descripción visual se acompañe de información numérica. Se decidió también en principio solo admitir respuestas binarias, pero prestando una atención especial a las posibles dificultades que esta restricción pudiera plantear a los usuarios.

Por otro lado, en tanto que las habilidades matemáticas de los usuarios pueden distorsionar gravemente el experimento cuando se facilita la información de manera numérica [5], se decidió asimismo observar el comportamiento de dos grupos diferenciados: por una parte, los alumnos de un curso de Máster en Matemáticas (Área de Ciencias), y por otra parte, los alumnos de un Máster en Ciencias de la Información (Área de Ciencias Sociales). Nótese que estas dos áreas de conocimiento difieren no solo en su grado de utilización de las Matemáticas y las habilidades numéricas y de cálculo, sino que también difieren en cuanto a sus criterios de *cientificidad* del conocimiento, que en Ciencias Sociales se aproxima más a un proceso de coherencia *subjetiva*, mientras que en Ciencias se suele asociar a una verificación experimental o empírica *objetiva* [5].

Por tanto, mediante la sencilla experiencia que se relata a continuación, se pretendía dilucidar si efectivamente las habilidades matemáticas suponen un factor relevante a la hora de estimar los grados de pertenencia en base a información con contenido numérico. Adicionalmente, se intenta verificar otros factores a tener en cuenta en el diseño de un experimento más formal, como la frecuencia con la que la gente escoge cada una de las dos opciones admitidas, o si existen diferencias entre los dos grupos a la hora de aceptar esta representación binaria de la realidad.

El procedimiento de esta experiencia es muy sencillo: en primer lugar, se exhiben en una pantalla las imágenes de dos ciudades A y B interconectadas por una línea, mostrándose a continuación la figura de un automóvil posicionado sobre esa línea. Posteriormente, se pregunta a los estudiantes cuál es la ciudad que se encuentra más cercana al emplazamiento del coche. Evidentemente, si el automóvil se ubica muy cerca de una de las dos ciudades, es de esperar que todos los encuestados señalen dicha ciudad de manera inmediata. La imagen sencillamente es ilustrativa a efectos del estudio, por lo que la misma no es a escala. Además, nótese que deliberadamente se introduce cierta imprecisión en la información en tanto que no se

especifica qué punto concreto del coche (i.e. su límite anterior o posterior, o el centro) ha de considerarse como estableciendo la localización exacta (i.e. precisa) del objeto. La cuestión es observar el comportamiento de los estudiantes y sus tiempos de respuesta a medida que el automóvil se va desplazando hacia la zona intermedia entre las ciudades, y percibir ese comportamiento en función del tipo de información que se maneja (numérico o gráfico).

3 RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA

Así pues, con el propósito de formalizar el procedimiento de esta experiencia preliminar, se dividió el estudio en dos cuestiones, proporcionando primero la información solo en términos visuales y, posteriormente, en la segunda pregunta, también en términos numéricos. En ambos casos, para cada uno de los alumnos, se recogió la alternativa (A o B) seleccionada así como el tiempo utilizado para facilitar la respuesta, con el fin de obtener un tiempo promedio de respuesta ponderado con un operador OWA [8], probablemente cercano al máximo. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, las habilidades numéricas podrían distorsionar gravemente las respuestas a la segunda pregunta, por lo que la experiencia se realizó de manera separada en un grupo de Ciencias y otro de Ciencias Sociales.

El número de alumnos de Ciencias Matemáticas y Ciencias Sociales que respondieron las dos preguntas fueron de unas 10 y 15 personas respectivamente. Al primer grupo se le hicieron dos preguntas: cuál es la ciudad más cercana respecto a una posición (imprecisa) entre el segmento que las une, primero solo con la referencia visual y luego con información numérica (distancia en kilómetros hasta la ciudad A). A continuación, al segundo grupo se les formalizaron las mismas preguntas pero en orden inverso. Y finalmente, al primer grupo se les repitió la primera pregunta pero esta vez agregando una tercera opción a las posibles respuestas con la finalidad de observar si modificaban su respuesta original.

El motivo por el cual se llevaron a cabo las cuestiones en orden inverso para los dos grupos se basaba en plantear a cada grupo en primera instancia la cuestión establecida mediante una información menos familiar, por ejemplo, la numérica para los estudiantes de Ciencias Sociales.

3.1 ENCUESTA 1: ALUMNOS DE CIENCIAS MATEMÁTICAS SIN INFORMACIÓN NUMÉRICA

La primera experiencia se llevó a cabo con los alumnos de Ciencias Matemáticas, presentándoles en la pantalla una imagen (ver Figura 1) en la que aparecían dos ciudades conectadas por una línea, en la cual se ubica un coche desplazándose sobre ella.

Como era de esperar, en el momento en que el coche salía de la ciudad A, los alumnos fueron unánimes y rápidos en identificar que esa ciudad estaba más cerca del coche (respuesta lograda en menos de 2 segundos como máximo). Sin embargo, en el entorno del punto medio del recorrido, los tiempos de respuesta se fueron alargando sensiblemente, y el esfuerzo por discernir qué distancia era mayor se hizo notable en sus expresiones al enfocar vehementemente hacia la imagen. Tras un intervalo de tiempo considerablemente mayor, los alumnos seleccionaron de forma sorprendentemente equitativa las dos ciudades.

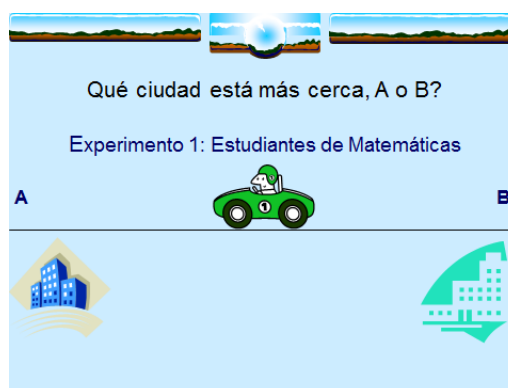


Figura 1: Estudiantes de Matemáticas (no numérica).

3.2 ENCUESTA 2: ALUMNOS DE CIENCIAS MATEMÁTICAS CON INFORMACIÓN NUMÉRICA

Seguidamente, a los mismos alumnos se les indicó que la distancia entre las dos ciudades era de 500 kilómetros, y luego se les suministró información numérica de la distancia a la ciudad A a la que se encontraba el coche (en la primera experiencia sólo disponían de la imagen con las dos ciudades y el coche), aunque sin precisar qué punto concreto del automóvil era el que se encontraba a esa distancia (ver Figura 2).

En este caso, el tiempo de respuesta cuando el coche se situó en algunos puntos todavía cercanos a la ciudad A fue ligeramente más largo (mayor a 4 segundos en algunos alumnos) que en la situación equivalente del ejemplo anterior basado solamente en información anumérica. Este pequeño aumento en el tiempo de respuesta puede asociarse a que los alumnos se cercioran ahora de que la impresión visual que reciben es correcta numéricamente. No obstante, alcanzado el kilómetro 251, en menos de 2 segundos y de manera unánime, todos señalaron a la ciudad B como la más cercana.



Figura 2: Estudiantes de Matemáticas (numérica).

Nótese que no se obligó a los alumnos a escoger qué ciudad es la más cercana al situar el coche en el kilómetro 250, puesto que sólo se quería observar sus respuestas bajo el supuesto de que la graduación está cercana al punto de simetría.

3.3 ENCUESTA 3: ALUMNOS DE CIENCIAS SOCIALES CON INFORMACIÓN NUMÉRICA

Una vez efectuadas las dos preguntas anteriores al grupo de alumnos de Ciencias Matemáticas, se procedió a realizarlas al grupo de alumnos de Ciencias Sociales en orden inverso.

En primer lugar, por tanto, se elaboró la pregunta con información numérica. En este caso, los estudiantes de Ciencias Sociales parecieron tardar ligeramente más que los alumnos de Ciencias Matemáticas en responder en cada una de las localizaciones del coche que se les plantearon. Y si bien todos unánimemente señalaron a la ciudad B como la más cercana cuando se les mostró que el coche estaba en el kilómetro 251, el tiempo de respuesta en este punto medio fue en algunos casos mayor a 2 segundos (ver Figura 3).

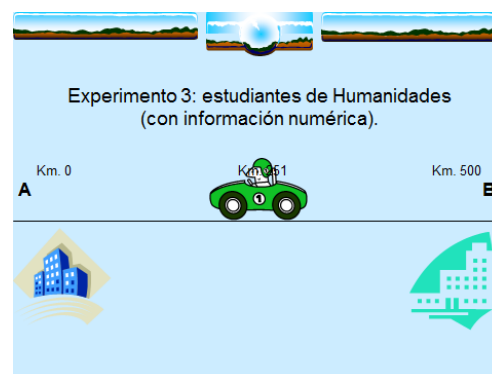


Figura 3: Estudiantes de Ciencias Sociales (numérica).

En cierto modo, estos resultados parecen sugerir que, similarmente a los de Ciencias Matemáticas, los estudiantes de Ciencias Sociales también deciden aprovechar la información numérica extra que se les facilita para intentar cerciorarse de que su impresión visual es correcta. Pero al tener menos familiaridad con la representación numérica de la información, sus tiempos de respuesta parecen aumentar en relación a los de los estudiantes de Ciencias Matemáticas.

3.4 ENCUESTA 4: ALUMNOS DE CIENCIAS SOCIALES SIN INFORMACIÓN NUMÉRICA

Inmediatamente después de responder a la pregunta con información numérica, se realizó a los estudiantes de Ciencias Sociales la misma serie de preguntas, ahora sólo con los gráficos y sin datos numéricos de distancias.

Aunque sus reacciones y tiempos de respuesta mostraron un patrón similar a los ya observados en los alumnos de Ciencias Matemáticas al ir acercándose el automóvil a la posición central, de forma inesperada, cuando el coche se colocó en el centro del eje que separa las dos ciudades y se les solicitó seleccionar la ciudad más cercana, varios estudiantes simultáneamente señalaron que el coche estaba en "medio", y en menos de 3 segundos todos unánimemente se negaron a escoger una de las dos ciudades como la más próxima. Todos estuvieron de acuerdo en que el coche estaba "a mitad de camino" y que no se podía escoger entre las dos ciudades.

Y en la discusión que surgió con este motivo, muchos alumnos revisaron la respuesta ofrecida en el caso numérico, al darse cuenta de que el kilómetro 251 no era significativamente diferente al kilómetro 250, y que en cualquier caso, ese

kilómetro 251 también debiera haberse interpretado como estar "a mitad de camino" entre ambas ciudades.

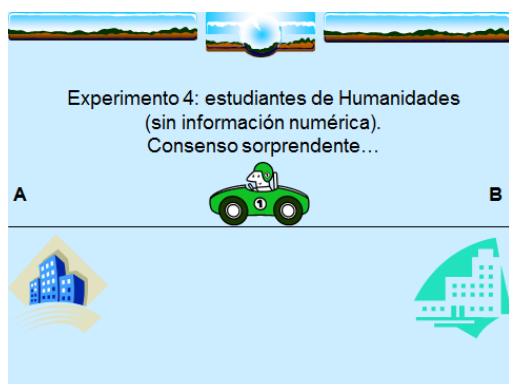


Figura 4: Estudiantes de Ciencias Sociales (no numérica).

3.5 ENCUESTAS 5 Y 6: VUELTA A LOS ALUMNOS DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Tras observar cómo el comportamiento de los alumnos de Ciencias Sociales al plantearles las cuestiones mediante información no numérica presentaba sensibles diferencias respecto a los alumnos de Ciencias Matemáticas, llegando incluso a rechazar el planteamiento binario del problema, decidimos retornar a los estudiantes de Ciencias Matemáticas para plantearles las mismas cuestiones, esta vez ofreciéndoles la opción de estar "a mitad de camino" como una tercera opción de respuesta.

Ahora, al presentarles la información no numérica en primer lugar (encuesta 5), todos los alumnos escogieron la opción "a mitad de camino" de manera inmediata y unánime cuando el coche se situó en la zona intermedia entre ambas ciudades. En la discusión que surgió se les señaló la potencial inconsistencia entre las diferentes respuestas (unánimes) que habían dado a la misma pregunta al permitirles opciones diferentes. No obstante, la mayoría estuvo de acuerdo en que si el primer día (encuesta 2) no existía la tercera opción, ésta no se podía introducir a posteriori, y por tanto no veían ninguna contradicción entre las opiniones que habían expresado en días diferentes.

La introducción de la información numérica produjo resultados no unánimes cuando el coche se situó en el kilómetro 251: unos siguieron basando su razonamiento en que 251 es mayor que 250 (y por tanto afirmaron que el coche estaba más cerca de la ciudad B), y otros aceptaron que

en este caso la tercera opción ("a medio camino") era la más adecuada de las tres.

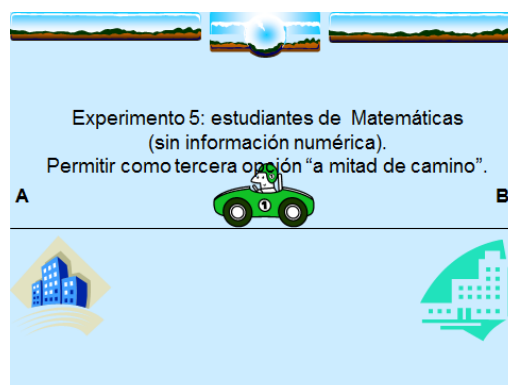


Figura 5: Estudiantes de Ciencias Matemáticas (tres opciones).

4 CONCLUSIONES

A pesar de que con esta experiencia se perseguía sólo una observación preliminar para el diseño posterior de un experimento más formal, con un sistema de medición de tiempo de respuestas más fiable y con una población controlada, los resultados sugieren que efectivamente esos tiempos de respuesta dependen de las habilidades numéricas de los sujetos, lo cual puede considerarse ciertamente un problema si se aborda esta cuestión fuera de un modelo subjetivo.

No obstante, quizá más importante que esta observación provisional, son las siguientes percepciones:

- La experiencia sugiere que es más fácil lograr el consenso sin información numérica que con información numérica.
- Los alumnos de Ciencias Matemáticas parecen tener una mayor predisposición a aceptar las opciones que se les presentan, y a no plantearse la posibilidad de construir o aceptar opciones que se adapten mejor a la información que reciben.
- Los estudiantes de Ciencias Sociales, sin embargo, tienden a responder las preguntas desde una racionalidad más práctica que con un criterio de objetividad empírico.
- El cómo se hace la pregunta (qué información se suministra y qué opciones se presentan) influyen decisivamente en los encuestados.
- Las reglas lógicas (binarias) que en ocasiones se imponen de manera artificial pueden conllevar un sesgo muy apreciable en la interpretación de la realidad.

En cierto modo, de acuerdo con este estudio preliminar, podría concluirse que las reglas lógicas (binarias) con las que en ciertos casos nos dotamos para la comprensión de la realidad pueden resultar no tan lógicas. La introducción de una lógica diferente (no binaria) puede cambiar decisivamente nuestra percepción y visión de la realidad [9].

Debemos no obstante subrayar que la experiencia relatada en este trabajo constituye tan solo un estudio preliminar de cara a la concepción de un experimento más formal, y en este sentido las conclusiones que hemos aportado solo pretenden reseñar ciertos problemas que podemos encontrar al plantear una experiencia más rigurosa, sugiriendo la existencia de diferencias cuantitativas (en términos de los tiempos de respuesta a cada cuestión) y cualitativas (en términos de las opciones de respuesta consideradas) entre los estudiantes de ciencias y letras cuando la información se presenta de manera numérica o anumérica.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Gobierno de España, proyecto TIN2012-32482.

REFERENCIAS

- [1] E. Hisdal: Are grades of membership probabilities. *Fuzzy Sets and Systems* 25:325-348, 1988.
- [2] J. Montero: Fuzzy logic and science. *Studies in Fuzziness and Soft Computing* 243:67-78, 2009.
- [3] J. Montero: La ilógica de nuestra lógica. *Seminario del Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Madrid, ETSI Informática*, Noviembre 23, 2012.
- [4] J. Montero, M. Mendel: Crisp acts, fuzzy decisions. *Advances in Fuzzy Logic* (S. Barro, A. Sobrino, A. Bugarin, eds.), Universidad de Santiago de Compostela 1998.
- [5] J.R. Núñez: Metodología de las Ciencias Sociales. *Alfadil*, 1989.
- [6] J. A. Paulos: Innumeracy, mathematical illiteracy and its consequences. *Hill and Wang*, 2001.
- [7] A. Urrutia, M. Varas, J. Galindo: Diseño de una Base de Datos Difusa Modelada con UML.

VIII Congreso Argentino de Ciencias de la Computación, 1027-1038, 2002.

[8] R.R. Yager: On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 18, 183-190, 1988.

[9] L.A. Zadeh: Fuzzy sets. *Information and Control* 8:338-353, 1965.